دراسة الدوال
الاتصال - النهايات

تمرين 1

1) لتكن f الدالة المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x}$.

أ- حدد D حيز تعريف الدالة f .

ب- أحسب النهايات التالية : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) أحسب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1-\cos x}{x^3}$ و $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\tan 2x}$

اكاديمية الدار البيضاء آنفا (دورة مارس 1991

الحل

1) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x}$.

أ- $x \in D \Leftrightarrow x^2 - x \neq 0$

لدينا : $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x = 1$ أو $x = 0)$

إذن $D = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

ب- . $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (x^3+1) = 1$ وَ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (x^2-x) = 0$

وبما أن $x^2 - x > 0$ إذا كان $x < 0$ فإن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$

. $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x^3+1) = 2$ وَ $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x^2-x) = 0$

وبما أن $x^2 - x > 0$ إذا كان $x > 1$ فإن $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$

. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

2) * $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1-\cos x}{x^3} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{2x}$

نعلم أن $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$ وبما أن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{2x} = +\infty$

فإن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1-\cos x}{x^3} = +\infty$

* $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\tan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\tan 2x} \cdot \frac{\sin x}{2}$

لدينا $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\tan 2x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\tan y} = 1$ (ضع $y = 2x$).

وَ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2} = 0$ ، إذن $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\tan 2x} = 1 . 0 = 0$

تمرين 2

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - mx^2 + x - m}{x-1}$ حيث m بارامتر حقيقي.

1) حدد قيمة العدد m لكي تقبل f تمديدا بالاتصال g في النقطة $x_0 = 1$ ، ثم عرف هذا التمديد.

2) لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = x^2 + 1 & ; x < 2 \\ h(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} & ; x \geq 2 \end{cases}$$

أ- أدرس اتصال الدالة h في النقطة 2.

ب- هل الدالة h متصلة على $\mathbb{R}$ ؟ علل جوابك.

اكاديمية الدار البيضاء آنفا (دورة مارس 1991)

الحل

1) لدينا $1 \notin D_f$. إذن لكي تقبل f تمديدا بالاتصال g في $x_0 = 1$ يكفي أن تكون لها نهاية منتهية في 1.

لدينا

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - mx^2 + x - m}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2(x - m) + (x - m)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 1)(x - m)}{x - 1}$$

تكون هذه النهاية منتهية في الحالة الوحيدة $m = 1$.

في هذه الحالة $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2$

الدالة g معرفة إذن كالتالي :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} & \text{إذا كان } x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$$

أي $g(x) = x^2 + 1$ لكل x من $\mathbb{R}$.

2) أ- لدينا $\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{2x+1}{x-1} = 5$

وَ $\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 + 1 = 5$

وَ $h(2) = 5$. إذن $\lim_{x \to 2} h(x) = h(2)$ ، وهذا يعني أن h متصلة في 2.

ب- . الدالة $x \mapsto x^2 + 1$ متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)، فهي إذن متصلة على $]-\infty, 2[$.

. الدالة $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ جذرية، فهي إذن متصلة على حيز تعريفها $\mathbb{R} - \{1\}$ ، وخصوصا على $[2, +\infty[$

. الدالة h متصلة في 2 (السؤال أ-)

بالتالي h متصلة على $\mathbb{R}$.

تمرين 3

أحسب النهايات الآتية :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^3 - 27} \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{x^2 + 1}{1 - 2x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + x} \right)$$

اكاديمية ابن امسيك - الفداء الدار البيضاء (دورة مارس 1991)

الحل

(الحساب المباشر يعطي أشكالا غير محددة).

. لدينا : $x^2 + 3x - 18 = (x - 3)(x + 6)$

وَ $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

إذن $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 3x - 18}{x^3 - 27} = \lim_{x \to 3} \dfrac{(x - 3)(x + 6)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x + 6}{x^2 + 3x + 9}$$

أي : $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 3x - 18}{x^3 - 27} = \dfrac{1}{3}$

. لكل x من $\mathbb{R}$ $\quad x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

وَ $\quad (x^2 - 2x)^2 = x^2(x-2)^2$

إذن $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 2x)^2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x-1}{x^2(x-2)} = +\infty$

. لدينا : $\displaystyle x + \frac{x^2+1}{1-2x} = \frac{-x^2+x+1}{1-2x}$

إذن $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{x^2+1}{1-2x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2+x+1}{1-2x}$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{-2x} = \lim_{+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

. $\displaystyle \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+x} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

إذن $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x+1} = 2$

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $\displaystyle f(x) = \frac{x^3 + (1-m)x - m}{x^2 - x}$ حيث m عدد حقيقي.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f .

2) أحسب $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x)$

3) نفترض في هذا السؤال أن $m = 1$.

أ- بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال g في النقطة 1 ثم عرف g .

ب- أحسب $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} g(x)$ و $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} g(x)$

4) نفترض في هذا السؤال أن $m \neq 1$.

أحسب ، بدلالة m : $\displaystyle \lim_{x \to 1} \left[f(x) + \frac{2(m-1)}{x-1}\right]$

اكاديمية ابن امسيك - النداء - الدار البيضاء (دورة مارس 1991)

الحل

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x \neq 0\}$

لدينا : $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x = 0$ أو $x = 1)$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

2) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

وَ $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

3) أ- بما أن $m = 1$ فإن $\displaystyle f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - x}$

إذن $\displaystyle \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)}$

$\displaystyle = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x} = 3$

وهذا يعني أن الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال g في النقطة 1 وَ وهو :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - x} & , x \in D_f \\ g(1) = 3 \end{cases}$$

(أو : $\displaystyle g(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$).

ب- $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+x+1}{x} = +\infty$

كذلك $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+x+1}{x} = -\infty$.

4) لكل x من D_f :

$$f(x)+\frac{2(m-1)}{x-1}=\frac{x^3+(1-m)x-m}{x^2-x}+\frac{2(m-1)}{x-1}$$
$$=\frac{x^3+(1-m)x-m+2x(m-1)}{x^2-x}$$
$$=\frac{x^3-x+mx-m}{x^2-x}$$
$$=\frac{x(x-1)(x+1)+m(x-1)}{x(x-1)}$$

إذن $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)+\frac{2(m-1)}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{(x-1)(x^2+x+m)}{x(x-1)}\right]$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+m}{x}$$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)+\frac{2(m-1)}{x-1}\right]=2+m$

تمرين 5

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2-3x-18}{2(x^2+2x-3)}$.

1) حدد D حيز تعريف الدالة f .

2) ادرس اتصال الدالة f على حيز تعريفها.

3) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)$

4) هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة $x_0=-3$ ؟

أكاديمية الرباط (دورة مارس 1991)

الحل

1) $x\in D \Leftrightarrow x^2+2x-3\neq0$

لدينا $\Delta'=1+3=4>0$ إذن جذرا ثلاثية الحدود x^2+2x-3

هما $x_1=\frac{-1+2}{1}=1$ و $x_2=\frac{-1-2}{1}=-3$

بالتالي : $D=\mathbb{R}-\{-3,1\}=]-\infty,-3[\cup]-3,1[\cup]1,+\infty[$

2) الدالة f جذرية، فهي إذن متصلة على D .

3) * $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{+\infty}\frac{x^2-3x-18}{2x^2+4x-6}=\lim\limits_{+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

* لدينا $\lim\limits_{x\to1}x^2-3x-18=-20$ و $\lim\limits_{x\to1}2(x^2+2x-3)=0$

جدول إشارة $2(x^2+2x-3)$ هو :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$2(x^2+2x-3)$		+	0	-	0	+	

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=+\infty$

4) . لدينا $-3\notin D$.

. نبحث عن $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$. هناك شكل غير محدد

نلاحظ أن 3- جذر لكل من الحدوديتين $x^2-3x-18$

و $2(x^2+2x-3)$.

بعد القسمة الاقليدية نجد :

$$x^2-3x-18=(x+3)(x-6)$$
و $$2(x^2+2x-3)=2(x+3)(x-1)$$

إذن لكل x من D : $f(x)=\frac{(x+3)(x-6)}{2(x+3)(x-1)}=\frac{x-6}{2(x-1)}$

ومنه $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\frac{x-6}{2(x-1)}=\frac{9}{8}$

خلاصة : الدالة f غير معرفة في 3- وتقبل نهاية منتهية في هذه النقطة، إذن f تقبل تمديدا بالاتصال في $x_0=-3$.

تمرين 6

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$

2) $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2}$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(3x - 1 - \frac{\sqrt{10}\, x^2 + 1}{x - 2} \right)$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

أكاديمية الرباط (دورة مارس 1991)

الحل

1) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x+1-2}{x^2-1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1}$

إذن $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \frac{1}{2}$

2) $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2} = \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}$

$= \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{1}{x + \sqrt{2}}$

إذن $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(3x - 1 - \frac{\sqrt{10}\, x^2 + 1}{x - 2} \right)$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(3x-1)(x-2) - \sqrt{10}\, x^2 - 1}{x - 2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(3 - \sqrt{10})\, x^2 - 7x + 1}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3 - \sqrt{10})\, x^2}{x}$

$= \lim_{x \to +\infty} (3 - \sqrt{10})\, x$

وبما أن $3 - \sqrt{10} < 0$ فإن $\lim_{x \to +\infty} \left(3x - 1 - \frac{\sqrt{10}\, x^2 + 1}{x - 2} \right) = -\infty$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x}{2}$

نعلم أن $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$

إذن $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

تمرين 7

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $g(x) = \frac{-x^3 + x^2 - x + 1}{(2x-1)(x-1)}$

1) حدد على شكل اتحاد مجالات، حيز تعريف الدالة g .

2) احسب $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

3) أحسب $\lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} g(x)$ و $\lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} g(x)$

4) أ- أحسب $\lim_{x \to 1} g(x)$.

ب- هل الدالة g تقبل تمديدا بالاتصال في 1 ؟ علل جوابك.

أكاديمية فاس (دورة مارس 1991)

الحل

1) $x \in D_g \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) \neq 0$

$\Leftrightarrow (2x-1 \neq 0$ و $x-1 \neq 0)$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$ و $x \neq 1$

إذن $D_g = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

2). $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$

كذلك . $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{x}{2} = +\infty$

3) . لدينا $\lim_{x \to \frac{1}{2}} -x^3 + x^2 - x + 1 = \frac{5}{8}$

و $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x-1)(x-1) = 0$

جدول إشارة $(2x-1)(x-1)$ هو :

x		$\frac{1}{2}$		1	
$(2x-1)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

إذن $\lim_{x \to \frac{1}{2}^{>}} (2x-1)(x-1) = 0^-$ و $\lim_{x \to \frac{1}{2}^{<}} (2x-1)(x-1) = 0^+$

ومنه $\lim_{x \to \frac{1}{2}^{>}} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \frac{1}{2}^{<}} g(x) = +\infty$

4) أ- لدينا شكل غير محدد.

نلاحظ أن 1 جذر للحدودية $-x^3 + x^2 - x + 1$.

بعد القسمة الاقليدية نجد : $-x^3 + x^2 - x + 1 = (x-1)(-x^2-1)$

إذن لكل x من D_g : $g(x) = \frac{(x-1)(-x^2-1)}{(2x-1)(x-1)} = -\frac{x^2+1}{2x-1}$

ومنه $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} -\frac{x^2+1}{2x-1} = -2$

ب- الدالة g تقبل تمديدا بالاتصال في 1 لأن $1 \notin D_g$ والدالة g تقبل نهاية منتهية في 1.

تمرين 8

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} & \text{إذا كان } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin(2-x)}{x^2-4} & \text{إذا كان } x \geq 0 \end{cases}$$

1) حدد على شكل اتحاد مجالات حيز تعريف الدالة f .

2) أ- حدد النهاية على اليمين والنهاية على اليسار للدالة f في 0

ب- هل الدالة f متصلة في 0 ؟ علل جوابك.

3) أحسب : $\lim_{x \to 2} f(x)$ و $\lim_{x \to -2} f(x)$

أكاديمية فاس (دورة مارس 1991)

الحل

1) المعادلة $x^2 - 4 = 0$ تكافيء ($x = 2$ أو $x = -2$)

من جهة أخرى $x^2 + 5 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

2) أ- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} = \dfrac{\sqrt{5}-3}{-4} = -\dfrac{\sqrt{5}-3}{4}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin(2-x)}{x^2-4} = 0$

ب- الدالة f ليست متصلة في 0 لأنها ليست متصلة على اليسار في 0. وذلك لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) \neq f(0)$

3) * بالنسبة للنهاية $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ، لدينا شكل غير محدد.

لكل $x \geq 0$ و $x \neq 2$: $f(x) = \dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin(2-x)}{(x-2)(x+2)}$

$= -\dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x+2} \cdot \dfrac{\sin(2-x)}{2-x}$

من جهة أخرى : $\lim\limits_{x \to 2} -\dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x+2} = -\dfrac{\cos\left(2+\frac{\pi}{2}\right)}{4}$

وَ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(2-x)}{2-x} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$

بالتالي : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\dfrac{\cos\left(2+\frac{\pi}{2}\right)}{4}$

* كذلك هناك شكل غير محدد بالنسبة لِ $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}$

بالتالي : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{1}{6}$.

تمرين 9

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{4x^3 - 12x^2 + 9x - 2}{x^2 - 2x}$

1) أ- حدد D حيز تعريف الدالة f .

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$

2) أ- بين أن $f(x) = \dfrac{(x-2)(2x-1)^2}{x^2-2x}$

ب- بين أن f تقبل تمديداً بالاتصال في النقطة 2 وحدد هذا التمديد.

3) هل يوجد تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة 0 ؟ (علل جوابك)

أكاديمية مكناس (دورة مارس 1991)

الحل

1) أ- $D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x \neq 0\}$

حلا المعادلة $x^2 - 2x = 0$ هما 0 و 2.

إذن $D = \mathbb{R} - \{0, 2\} =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$

ب- * $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x = +\infty$

* لدينا $\lim_{x \to 0} 4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = -2$ وَ $\lim_{x \to 0} x^2 - 2x = 0$

جدول إشارة $x^2 - 2x$ هو :

x		0		2	
$x^2 - 2x$	+		-		+

إذن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ وَ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$.

2) أ- لكل x من D :

$$(x-2)(2x-1)^2 = (x-2)(4x^2 - 4x + 1)$$
$$= 4x^3 - 4x^2 + x - 8x^2 + 8x - 2$$
$$= 4x^3 - 12x^2 + 9x - 2$$

إذن $f(x) = \dfrac{4x^3 - 12x^2 + 9x - 2}{x^2 - 2x} = \dfrac{(x-2)(2x-1)^2}{x^2 - 2x}$

بالتالي $f(x) = \dfrac{(x-2)(2x-1)^2}{x^2 - 2x}$; $\forall x \in D$

ب- $\lim_{x \to 2} \dfrac{(2x-1)^2}{x} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(2x-1)^2}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} f(x)$

إذن $\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{9}{2}$

من جهة أخرى $2 \notin D$ ، إذن f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 2.

هذا التمديد هو الدالة g المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{إذا كان } x \in D \\ g(2) = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

3) الدالة f لا تقبل نهاية منتهية عند النقطة 0 فهي إذن لا تقبل تمديدا بالاتصال عند هذه النقطة.

تمرين 10

a و b بارامتران حقيقيان. نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{ax+b}{x+2} & \text{إذا كان x ينتمي الى }]-1, 1[\\ g(x) = |x-2| & \text{إذا كان x ينتمي الى }]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\end{cases}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة g .

2) حدد a و b علما أن الدالة g متصلة في النقطة 1- وفي النقطة 1.

(أكاديمية مكناس دورة مارس 1991)

الحل

1) $D_g =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\cup]-1, 1[= \mathbb{R}$

2) لدينا : $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{ax+b}{x+2} = -a+b$

وَ $g(-1) = 3$

وَ $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} |x-2| = 3$

الدالة g متصلة في 1- يعني $-a+b = 3$.

كذلك g متصلة في 1 يعني $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = g(1)$

أي $\dfrac{a+b}{3} = 1$.

نحصل إذن على النظمة $\begin{cases} -a+b = 3 \\ a+b = 3 \end{cases}$

ومنها $a = 0$ وَ $b = 3$.

تمرين 11

أحسب النهايات التالية :

1) $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^7 - x}{3x^7 + 6}$ (2 $b = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$

3) $c = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^{18} + 1}{2(x^2 + 2)^9}$ (4 $d = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{x}$

5) $c = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x}{\tan 2x}$ (6 $f = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{3\sqrt{3}\cos x - 3\sin x}{3x - \pi}$ (يمكن وضع $x = h + \frac{\pi}{3}$)

أكاديمية وجدة (دورة مارس 1991

الحل

1) $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^7 - x}{3x^7 + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^7}{3x^7} = \dfrac{1}{3}$

2) $b = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+4}{x+1} = \dfrac{5}{2}$

3) $c = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^{18} + 1}{2(x^2+2)^9} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^{18}}{2 . x^{18}} = \dfrac{1}{2}$

4) $d = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{7x} . 7$

نضع $X = 7x$. عندما يؤول x الى 0 فإن X يؤول الى 0.

إذن $d = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} . 7 = 1 . 7 = 7$

5) $e = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x}{\tan 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x}{5x} \cdot \dfrac{5x}{2x} \cdot \dfrac{2x}{\tan 2x}$

لدينا : * $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x}{5x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan t}{t} = 1$

و * $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{2x} = \dfrac{5}{2}$

و * $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\tan 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\frac{\tan 2x}{2x}} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{1}{\frac{\tan y}{y}} = 1$

إذن $e = 1 . \dfrac{5}{2} . 1 = \dfrac{5}{2}$.

6) نضع $x = h + \dfrac{\pi}{3}$ إذن $h = x - \dfrac{\pi}{3}$. عندما يؤول x الى $\dfrac{\pi}{3}$ فإن h يؤول الى 0.

لدينا

$$3\sqrt{3}\cos x - 3\sin x = 3\sqrt{3}\cos\left(h + \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin\left(h + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3\sqrt{3}\left(\cos h \cos\frac{\pi}{3} - \sin h \sin\frac{\pi}{3}\right) - 3\left(\sin h \cos\frac{\pi}{3} + \cos h \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos h - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h\right) - 3\left(\frac{1}{2}\sin h + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos h\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos h - \frac{9}{2}\sin h - \frac{3}{2}\sin h - \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos h$$

$$= -6\sin h$$

إذن $f = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-6\sin h}{3h} = \lim\limits_{h \to 0} -2 . \dfrac{\sin h}{h} = -2$.

تمرين 12

نعتبر الدالة f المعرفة من R نحو R بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^3 - 4x} & \text{si } x \notin \{-2, 0, 2\} \\ f(-2) = 1 & \\ f(2) = t & , \quad t \in IR \end{cases}$$

تمرين 11

أحسب النهايات التالية :

(1 $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^7 - x}{3x^7 + 6}$ (2 $b = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$

(3 $c = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{18} + 1}{2(x^2 + 2)^9}$ (4 $d = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{x}$

(5 $e = \lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{\tan 2x}$ (6 $f = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3}\cos x - 3\sin x}{3x - \pi}$ (يمكن وضع $x = h + \frac{\pi}{3}$)

اكاديمية وجدة (دورة مارس 1991)

الحل

(1 $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^7 - x}{3x^7 + 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^7}{3x^7} = \frac{1}{3}$

(2 $b = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2}$

(3 $c = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{18} + 1}{2(x^2 + 2)^9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{18}}{2 \cdot x^{18}} = \frac{1}{2}$

(4 $d = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7$

نضع $X = 7x$. عندما يؤول x الى 0 فإن X يؤول الى 0.

إذن $d = \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} \cdot 7 = 1 \cdot 7 = 7$

(5 $e = \lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{\tan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{2x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x}$

لدينا : * $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{5x} = \lim_{t \to 0} \frac{\tan t}{t} = 1$

وَ * $\lim_{x \to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$

وَ * $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\tan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\tan 2x}{2x}} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\tan y}{y}} = 1$

إذن $e = 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$.

(6 نضع $x = h + \frac{\pi}{3}$ إذن $h = x - \frac{\pi}{3}$. عندما يؤول x الى $\frac{\pi}{3}$ فإن h يؤول الى 0.

لدينا

$$3\sqrt{3}\cos x - 3\sin x = 3\sqrt{3}\cos\left(h + \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin\left(h + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3\sqrt{3}\left(\cos h \cos\frac{\pi}{3} - \sin h \sin\frac{\pi}{3}\right) - 3\left(\sin h \cos\frac{\pi}{3} + \cos h \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos h - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h\right) - 3\left(\frac{1}{2}\sin h + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos h\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos h - \frac{9}{2}\sin h - \frac{3}{2}\sin h - \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos h$$

$$= -6\sin h$$

إذن $f = \lim_{h \to 0} \frac{-6\sin h}{3h} = \lim_{h \to 0} -2 \cdot \frac{\sin h}{h} = -2$.

تمرين 12

نعتبر الدالة f المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^3 - 4x} & \text{si } x \notin \{-2, 0, 2\} \\ f(-2) = 1 & \\ f(2) = t & , \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .
2) هل الدالة f متصلة عند النقطة $x_0 = -2$ ؟
3) حدد t علما أن f متصلة عند النقطة $x_1 = 2$.
4) هل يوجد تمديد بالاتصال للدالة f عند النقطة $x_2 = 0$ ؟

أكاديمية وجدة (دورة مارس 1991)

الحل

1) المعادلة $x^3 - 4x = 0$ تعني $x(x^2 - 4) = 0$

أي ($x^2 - 4 = 0$ أو $x = 0$) . ومنه $x = 0$ أو $x = 2$ أو $x = -2$.

وبما أن $f(-2)$ و $f(2)$ موجودان فإن :

$$D_f = (\mathbb{R} - \{0, 2, -2\}) \cup \{-2, 2\} = \mathbb{R}^*$$

2) $$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 4x} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x(x^2 - 4)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 4}{x} = -4$$

إذن $\lim_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$. ومنه فإن f ليست متصلة في $x_0 = -2$

3) لدينا $f(2) = t$ و $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4}{x} = 4$

إذن : f متصلة في $x_1 = 2$ تعني $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

أي $t = 4$.

4) لدينا $0 \notin D_f$.

نبحث هل f تقبل نهاية منتهية في 0.

لدينا $\lim_{x \to 0} x^4 - 16 = -16$

و $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} x^3 - 4x = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} x(x^2 - 4) = 0^-$

إذن $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$

ومنه فإن f لا تقبل تمديدا بالاتصال في $x_2 = 0$.

تمرين 13

أحسب النهايات التالية :

a) $\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)$; b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3|x|(x^2 - 2)}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$; d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$

أكاديمية مراكش (دورة مارس 1991)

الحل

a) لكل x من $\mathbb{R} / \{-1\}$: $x\left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right) = x \cdot \frac{2}{x+1}$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

b) لكل x من $\mathbb{R}_-^*$ فإن : $\frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3|x|(x^2 - 2)} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{-3x^3 + 6x}$

إذن $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3|x|(x^2 - 2)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{-3x^3} = -\frac{2}{3}$

c) $\lim_{x \to 1} (x^3 - 3x^2 + x + 1) = 0$ و $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$

نحصل إذن على شكل غير محدد. وبعد القسمة الاقليدية لـ $x^3 - 3x^2 + x + 1$ على $x - 1$ نجد :

$x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x-1)(x^2 - 2x - 1)$

إذن : $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1} = -1$

d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ و $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos 3x = 0$

نحصل إذن على شكل غير محدد.

نضع : $X = x - \frac{\pi}{2}$ أي $x = X + \frac{\pi}{2}$

إذن $\frac{\cos x}{\cos 3x} = \frac{\cos\left(X + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(3X + \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{-\sin X}{\sin 3X}$

$\left(\cos\left(3X + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(3X + \pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(3X + \pi) = \sin 3X\right)$

من جهة أخرى $\frac{\sin X}{\sin 3X} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin X}{X} \cdot \frac{3X}{\sin 3X}$

وَ $\lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = \lim_{X \to 0} \frac{3X}{\sin 3X} = 1$

وبالتالي : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim_{X \to 0} -\frac{\sin X}{\sin 3X} = -\frac{1}{3}$

تمرين 14

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - 3x & ; \ x \leq -1 \\ f(x) = x^2 + x + 4 & ; \ -1 < x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} & ; \ x > 1 \end{cases}$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .
2) بين أن f متصلة في النقطة (1-).
3) هل الدالة f متصلة في النقطة 1 ؟
4) بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 2 وعرف هذا التمديد.

اكاديمية مراكش (دورة مارس 1991)

الحل

1) الدالة f حدودية على كل من المجالين $]-\infty, -1]$ وَ $]-1, 1]$

إذن $]-\infty, 1] \subset D$.

لكل x من $]1, +\infty[$ يكون $f(x)$ موجوداً إذا وفقط إذا كان $x^2 - 3x + 2 \neq 0$.

. نحل المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ في المجال $]1, +\infty[$

$\Delta = 1$ إذن $x_1 = 1$ وَ $x_2 = 2$

$1 \notin]1, +\infty[$ وَ $2 \in]1, +\infty[$

إذن f غير معرفة في العدد 2.

وبالتالي : $D = \mathbb{R} - \{2\}$.

2) $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (1 - 3x) = 4 = f(-1)$

وَ $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x^2 + x + 4) = 4$

إذن $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 4$

وهذا يعني أن f متصلة في النقطة (1-).

3) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = +\infty$

إذن f غير متصلة على اليمين في النقطة 1 وهذا يعني أنها غير متصلة في 1.

4) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-1} = 1$

إذن f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 2 ، وهو :

$$g : \begin{cases} g(x) = f(x) & x \neq 2 \\ g(2) = 1 \end{cases}$$

أي :

$$\begin{cases} g(x) = 1 - 3x & , x \leq -1 \\ g(x) = x^2 + x + 4 & , -1 < x \leq 1 \\ g(x) = \dfrac{1}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

تمرين 15

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

1) أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f وادرس اتصالها على D_f .

ب- أحسب النهايات : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) أ- بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال عند النقطة $x_0 = 1$ وحدده.

ب- ادرس نهاية الدالة f عندما تزول x الى $x_1 = 2$

هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال عند النقطة x_1 ؟ علل جوابك.

أكاديمية القنيطرة (دورة مارس 1991)

الحل

1)أ- يكون x عنصرا من D_f إذا وفقط إذا كان $x^2 - 3x + 2 \neq 0$.

لدينا $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ ، إذن جذرا ثلاثية الحدود

$x^2 - 3x + 2$ هما : $x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ وَ $x_2 = 1$.

بالتالي : $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\} =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

الدالة f متصلة على D_f لانها دالة جذرية.

ب- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

2) أ- . لدينا $1 \notin D_f$.

. نبحث عن $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. لدينا شكل غير محدد.

نلاحظ أن $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

وَ $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

إذن $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+3}{x-2} = -4$

بالتالي : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -4$

خلاصة : $1 \notin D_f$ و f تقبل نهاية منتهية في 1. هذا يعني أن f تقبل تمديدا بالاتصال في 1.

هذا التمديد هو الدالة g المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} & \text{إذا كان } x \in D_f \\ g(1) = -4 \end{cases}$$

ب- لدينا $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 2x - 3 = 5$ وَ $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 3x + 2 = 0$

وجدول إشارة $x^2 - 3x + 2$ هو :

x		1		2	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+

إذن $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.

الدالة f لا تقبل تمديدا بالاتصال عند النقطة 2 لأن f لا تقبل نهاية منتهية عند هذه النقطة.

تمرين 16

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - |x^2 - 2x|}{x} \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1) أكتب f (x) بدون استعمال رمز القيمة المطلقة في المجالات المناسبة.

2) ادرس اتصال الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند النقطة $x_0 = 0$.

أكاديمية القنيطرة (دورة مارس 1991)

الحل

1) نلاحظ أن $x^2 - 2x = x(x-2)$. إذن جدول إشارة $x^2 - 2x$ هو :

x		0		2	
$x^2 - 2x$	+	0	-	0	+

* إذا كان $x \in]0, 2]$ فإن $x^2 - 2x \leq 0$

و $|x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$.

ومنه $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x} = x^2 + x - 2$

* إذا كان $x \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$ فإن $x^2 - 2x \geq 0$

ومنه $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2x}{x} = x^2 - x + 2$.

2) . $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + x - 2 = -2$

وبما أن $f(0) \neq -2$ فإن f ليست متصلة على اليمين في 0.

. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 - x + 2 = 2 = f(0)$

إذن f متصلة على اليسار في 0.

ملاحظة : f ليست متصلة عند النقطة 0.

تمرين 17

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x + 1}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)^2}$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{x+1}{|x^2 + 3x + 2|}$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{x+1}{|x^2 + 3x + 2|}$

أكاديمية المحمدية (دورة مارس 1991)

الحل

1) . $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

2) لدينا : $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1)$

$= (x-1)(x^2-1)$

$= (x-1)(x-1)(x+1)$

إذن $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2}$

ومنه $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$

3) لدينا : $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

إذا كان $x > -1$ فإن $(x+1)(x+2) > 0$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{x+1}{|x^2 + 3x + 2|} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{x+1}{(x+1)(x+2)}$

أي $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{x+1}{|x^2+3x+2|} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x+2} = 1$

4) بما أن $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

وَ $(x+1)(x+2) < 0$ إذا كان $-2 < x < -1$ فإن :

$$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{|x^2+3x+2|} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{-(x+1)(x+2)}$$

$$= \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} -\frac{1}{x+2} = -1$$

تمرين 18

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي :

$g(x)=x^2$ إذا كان $-1 \leq x \leq 1$.

و $g(x)=\frac{1}{x}$ إذا كان $|x|>1$.

1) بين أن الدالة g متصلة في النقطة 1.

2) هل الدالة g متصلة في النقطة 1- ؟ علل جوابك.

اكاديمية المحمدية (دورة مارس 1991)

الحل

1)
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x} = 1$.

وَ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 = 1$.

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = g(1) = 1$

وهذا يعني أن الدالة g متصلة في النقطة 1.

2) الاتصال في 1- :

لدينا : $g(-1)=(-1)^2=1$.

وَ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{1}{x} = -1$.

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) \neq g(-1)$. وهذا يعني أن g ليست متصلة على اليسار في 1- . وبالتالي فهي غير متصلة في 1-.

تمرين 19

1) أحسب : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5-3x^3+2)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3+1}{1-x^3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x(x-1)}{x^4+3}$

2) لتكن f الدالة المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2+x-6}{|x-2|}$

هل تقبل f نهاية في النقطة 2 ؟

اكاديمية اكادير (دورة مارس 1991)

الحل

1) $\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 3x^3 + 2) = \lim_{x \to -\infty} (x^5) = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 1}{1 - x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{-x^3} = -2$.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x(x-1)}{x^4 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x}{x^4 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^4}$.

إذن $\lim_{x \to -\infty} \frac{x(x-1)}{x^4 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

2) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

إذن إذا كان $x > 2$ فإن $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x + 3$

وإذا كان $x < 2$ فإن $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{-(x-2)} = -x - 3$

ومنه $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x+3) = 5$

وَ $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (-x-3) = -5$

وبالتالي فإن f لا تقبل نهاية في النقطة 2 $\left(\lim_{2^+} f \neq \lim_{2^-} f\right)$

تمرين 20

لتكن g الدالة المعرفة بما يلي : $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

1) حدد حيز تعريف g .

2) بين أن g تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة (2-) ثم حدده.

3) هل تقبل g تمديدا بالاتصال في النقطة 1 ؟

اكاديمية اكادير (دورة مارس 1991)

الحل

$g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

1) $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^3 + x^2 - 2x \neq 0\}$

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$ $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2)$

$= x(x-1)(x+2)$

إذن $D_g = \mathbb{R} - \{0, 1, -2\}$

2) لكل x من $\mathbb{R}$ $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

إذن لكل x من D_g $g(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x(x+2)(x-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)}$

ومنه $\lim_{x \to -2} g(x) = -\frac{1}{6}$

وهذا يعني أن g تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة (2-) وهو الدالة h بحيث : $\begin{cases} h(x) = g(x) & x \in D_g \\ h(-2) = -\frac{1}{6} \end{cases}$

3) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x(x-1)} = +\infty$

إذن g ليست لها نهاية منتهية في 1 وهذا يعني أنها لا تقبل تمديدا بالاتصال في 1.

الحل

1) $\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 3x^3 + 2) = \lim_{x \to -\infty} (x^5) = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 1}{1 - x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{-x^3} = -2$.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x(x-1)}{x^4 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x}{x^4 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^4}$.

إذن $\lim_{x \to -\infty} \frac{x(x-1)}{x^4 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

2) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

إذن إذا كان $x > 2$ فإن $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x + 3$

وإذا كان $x < 2$ فإن $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{-(x-2)} = -x - 3$

ومنه $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x+3) = 5$

و $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (-x-3) = -5$

وبالتالي فإن f لا تقبل نهاية في النقطة 2 $\left(\lim_{2^+} f \neq \lim_{2^-} f\right)$

تمرين 20

لتكن g الدالة المعرفة بما يلي : $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

1) حدد حيز تعريف g .

2) بين أن g تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة (2-) ثم حدده.

3) هل تقبل g تمديدا بالاتصال في النقطة 1 ؟

اكاديمية اكادير (دورة مارس 1991)

الحل

$g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

1) $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^3 + x^2 - 2x \neq 0\}$

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$ $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2)$

$= x(x-1)(x+2)$

إذن $D_g = \mathbb{R} - \{0, 1, -2\}$

2) لكل x من $\mathbb{R}$ $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

إذن لكل x من D_g $g(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x(x+2)(x-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)}$

ومنه $\lim_{x \to -2} g(x) = -\frac{1}{6}$

وهذا يعني أن g تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة (2-) وهو الدالة h بحيث :

$\begin{cases} h(x) = g(x) & x \in D_g \\ h(-2) = -\frac{1}{6} \end{cases}$

3) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x(x-1)} = +\infty$

إذن g ليست لها نهاية منتهية في 1 وهذا يعني أنها لا تقبل تمديدا بالاتصال في 1.

تمرين 21

أحسب النهايات الآتية :

$$a)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+2x}{x^3+1}\quad;\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3}{x^4+x}\quad;\quad c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-2}{(x^2-2)^2}$$

$$d)\ \lim_{\substack{x\to-4\\x<-4}}\frac{x^2-2}{x+4}\quad;\quad e)\ \lim_{\substack{x\to-4\\x>-4}}\frac{x^2-2}{x+4}\quad;\quad f)\ \lim_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}$$

(أكاديمية تطوان دورة مارس 1991)

الحل

(a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+2x}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

(b $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3}{x^4+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

(c $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-2}{(x^2-2)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-2}{x^4-4x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4}{x^4}=1$

(d لدينا $\lim\limits_{x\to-4}x^2-2=14$ و $\lim\limits_{x\to-4}(x+4)=0$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x<-4}}\dfrac{x^2-2}{x+4}=-\infty$

(e $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x>-4}}\dfrac{x^2-2}{x+4}=+\infty$ (حسب d))

(f لدينا $2x^2-x-3=(x+1)(2x-3)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

إذن $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(2x-3)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}(2x-3)=-5$

تمرين 22

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+\dfrac{1}{2} & \text{; إذا كان } x\geq 0\\ f(x)=\dfrac{1}{2}-2x\cos x+\sin x & \text{; إذا كان } x<0\end{cases}$$

ادرس اتصال f في النقطة $x_0=0$

(أكاديمية تطوان دورة مارس 1991)

الحل

لدينا $f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}$ لكل x من $[0,+\infty[$ ، إذن

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=f(0)=\dfrac{1}{2}$.

وبما أن $f(x)=\dfrac{1}{2}-2x\cos x+\sin x$ لكل x من $]-\infty,0[$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2}-2x\cos x+\sin x\right)$

أي $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\dfrac{1}{2}$

(لأن $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$ و $\lim\limits_{x\to0}x\cos x=0$).

وبالتالي فإن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{1}{2}=f(0)$ وهذا يعني أن الدالة f

متصلة في النقطة $x_0=0$.

تمرين 23

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي :

$f(x) = x - 1$ إذا كان $x \geq 1$
$f(x) = x + 1$ إذا كان $x < 1$

و

$g(x) = x^2 + 2x$ إذا كان $x \geq 1$
$g(x) = x - 1$ إذا كان $x < 1$

1) بين أن الدالتين f و g غير متصلتين في النقطة $x_0 = 1$

2) عرف الدالة f . g وادرس اتصالها في النقطة $x_0 = 1$

اكاديمية تطوان (دورة مارس 1991)

الحل

1) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$

وَ $f(1) = 0$ ، إذن f ليست متصلة على اليسار في النقطة $x_0 = 1$

وهذا يعني أنها غير متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

كذلك $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$ وَ $g(1) = 3$

إذن g غير متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

2) إذا كان $x \geq 1$ فإن $(f . g)(x) = (x - 1)(x^2 + 2x)$

وإذا كان $x < 1$ فإن $(f . g)(x) = (x + 1)(x - 1)$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (f . g)(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x - 1)(x^2 + 2x) = 0$

وَ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (f . g) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x + 1)(x - 1) = 0$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (f . g)(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (f . g)(x) = 0 = f(1)$

وهذا يعني أن f . g متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

نلاحظ إذن أن الدالتين f و g غير متصلتين في $x_0 = 1$ و f . g متصلة في $x_0 = 1$.

تمرين 24

1) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - x + 6\right)$ و $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2 + 3} - ax$ (a عدد حقيقي)

أ- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ إذا كان $a = 2$

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ إذا كان $a > 2$

ج- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ إذا كان $a < 2$

اكاديمية بني ملال (دورة مارس 1991)

الحل

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x+6\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-(x-6)(x+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+7}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x}=5$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x+6\right)=5$

* $\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4}$

إذن $\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=-\frac{1}{4}$.

2) أ- $a=2$ إذن $f(x)=\frac{2x^3+x}{x^2+3}-2x$

$=\frac{2x^3+x-2x(x^2+3)}{x^2+3}=\frac{-5x}{x^2+3}$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x^2+3}=\lim_{+\infty}\frac{-5x}{x^2}=\lim_{+\infty}\frac{-5}{x}=0$

ب- $\forall x\in D_f:\ f(x)=\frac{2x^3+x}{x^2+3}-ax$

$=\frac{2x^3+x-ax(x^2+3)}{x^2+3}$

$=\frac{(2-a)x^3+(1-3a)x}{x^2+3}$

بما أن $a>2$ فإن $2-a<0$

إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-a)x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(2-a)x$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

ج- في حالة $a<2$ فإن $2-a>0$ ، إذن

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-a)x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(2-a)x=+\infty$

تمرين 25

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-1} & ,\ x\le2 \\ f(x)=2x^2-9 & ,\ x>2\end{cases}$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2) ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=2$

3) بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 1 وعرف هذا التمديد.

4) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $g(x)=f(-x+4)$

بين أنه لكل $x<2$ فإن $-x+4>2$ واستنتج صيغة $g(x)$ لكل x من المجال $]-\infty,2[$.

اكاديمية بني ملال (دورة مارس 1991)

الحل

1) الدالة $x\mapsto\frac{x^2-4x+3}{x-1}$ معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ، وخصوصا

على المجموعة $]-\infty,2]-\{1\}$.

والدالة $x\mapsto2x^2-9$ معرفة على $\mathbb{R}$ وخصوصا على $]2,+\infty[$

إذن $D=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2) لدينا : $\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}2x^2-9=-1$

وَ $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=-1$

وَ $f(2)=-1$

إذن $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$. ومنه فإن f متصلة في 2.

3) لدينا $1\notin D$. ومن جهة أخرى :

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}$

ومنه $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x-3) = -2$

إذن f تقبل نهاية منتهية في 1.

وبالتالي فإن f تقبل تمديدا بالاتصال في 1.

هذا التمديد هو الدالة h المعرفة بـ :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & ; x \leq 2 \\ h(x) = 2x^2 - 9 & ; x > 2 \\ h(1) = -2 \end{cases}$$

4) ليكن x من $\mathbb{R}$ بحيث $x < 2$ ، إذن $-x > -2$.

ومنه $-x + 4 > 2$

إذن $g(x) = f(-x+4) = 2(-x+4)^2 - 9 = 2x^2 - 16x + 23$

بالتالي : $\forall x \in]-\infty, 2[\; : \; g(x) = 2x^2 - 16x + 23$

تمرين 26

1) أحسب : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3 - x^2}{2x - 1}$ ، $\lim_{x \to 3} \dfrac{9 - x^2}{x - 3}$

2) حدد العدد الحقيقي a لكي تكون الدالة f المعرفة بـ : $\begin{cases} f(x) = x + 1 & ; x \leq 1 \\ f(x) = 3 - ax & ; x > 1 \end{cases}$ متصلة في $x_0 = 1$.

اكاديمية الجديدة (دورة مارس 1991)

الحل

1) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3 - x^2}{2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{2x} = \lim_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{2} = -\infty$

$\lim_{x \to 3} \dfrac{9 - x^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \dfrac{(3-x)(3+x)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} -3 - x = -6$

2) لدينا $f(1) = 2$ و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x + 1 = 2$

و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (3 - ax) = 3 - a$.

f متصلة في $x_0 = 1$ يعني $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)$

وهذا يكافىء $3 - a = 2$. أي $a = 1$.

تمرين 27

لتكن f الدالة المعرف بما يلي : $x \neq 0$ ، $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x} + \dfrac{1}{x^2 - x} \\ f(0) = -2 \end{cases}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f .

2) ادرس اتصال الدالة f في $x_0 = 0$.

اكاديمية الجديدة (دورة مارس 1991)

الحل

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x \neq 0 \text{ و } x^2 - x \neq 0\} \cup \{0\}$

$x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ و } x \neq 1$

$x^2 + x \neq 0 \quad \Leftrightarrow x(x+1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ و } x \neq -1$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

2) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2 + x} + \dfrac{1}{x^2 - x} \right)$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x + x^2 + x}{x^4 - x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{x^2(x^2 - 1)}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{2}{x^2 - 1} = -2$

إذن $\lim_{x \to 0} f(x) = -2 = f(0)$

وهذا يعني أن f متصلة في 0.

تمرين 28

1) أحسب $\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)}{x}$.

2) لتكن f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x) = \frac{\cos \frac{\pi}{2}(x-1)}{x}$

بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة $x_0 = 0$ ، وحدد هذا التمديد.

(أكاديمية الجديدة (دورة مارس 1991)

الحل

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)}{\frac{\pi}{2} x} \cdot \frac{\pi}{2}$

نضع $X = \frac{\pi}{2} x$. عندما يؤول x الى 0 فإن X يؤول الى 0.

إذن النهاية المطلوبة هي : $\lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

2) لدينا $0 \notin D_f$.

من جهة أخرى : $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}(x-1)}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x\right)}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x}$

وحسب السؤال 1) فإن $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$

خلاصة : $0 \notin D_f$ و f تقبل نهاية منتهية في 0. إذن f تقبل تمديدا بالاتصال في $x_0 = 0$.

هذا التمديد هو الدالة g المعرفة بـ :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\cos \frac{\pi}{2}(x-1)}{x} \ ; \ x \neq 0 \\ g(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تمرين 29

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 5x + 3) \ ; \ \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \ ; \ \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) \ ; \ \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)$$

(أكاديمية سطات (دورة مارس 1991)

الحل

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5x + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3x - 1}{x + 2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = 3$

* $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$

* عندما يؤول x الى $\frac{\pi}{2}$ و $x > \frac{\pi}{2}$ فإن $1 - \cos x$ يؤول الى 1 و cos x يؤول الى 0 و $\cos x < 0$.

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \frac{1 - \cos x}{\cos x} = -\infty$

تمرين 30

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

1) a) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

b) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال g في النقطة $x_0 = \frac{1}{2}$ ثم عرف g .

أكاديمية سطات (دورة مارس 1991)

الحل

1) a) $x \in D_f \Leftrightarrow 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{2x}$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

كذلك . $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$

2) لدينا :

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x+1) = 2$

إذن f تقبل نهاية منتهية في $\frac{1}{2}$.

من جهة أخرى $\frac{1}{2} \notin D_f$ ، إذن f تقبل تمديدا بالاتصال g في النقطة $x_0 = \frac{1}{2}$. والدالة g معرفة كالتالي :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} & \text{إذا كان } x \neq \frac{1}{2} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases}$$